Aula 04:

Algoritmo Simplex

Programação Linear e Inteira

Túlio Toffolo
www.toffolo.com.br

Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

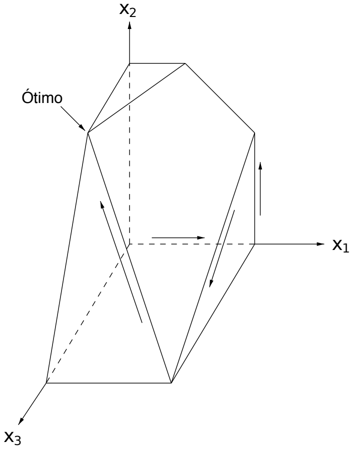
Algoritmo Simplex

Algoritmo Simplex

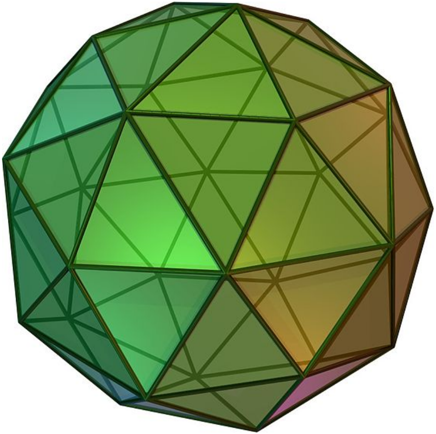
O Algoritmo Simplex

- Proposto por Dantzig, o Simplex é um algoritmo para resolver problemas de PL.
- Utiliza uma estratégia **gulosa** e pula de vértice em vértice, até encontrar um que não possa ser melhorado (solução ótima).
- O Simplex apresenta uma forma eficiente de resolver os sistemas de equações lineares resultantes após cada iteração (pulo de um ponto extremo para outro).

O Algoritmo Simplex



O Algoritmo Simplex



O Algoritmo Simplex

Passo 1 Converta o PL para a **Forma Padrão**.

Passo 2 Obtenha uma **Solução Básica Factível** (se possível) da Forma Padrão.

Passo 3 **Teste de Otimalidade**: determine se a Solução Básica é Ótima. Se Ótima Pare.

Passo 4 Caso não seja ótima - **Mudança de Base**, checar:

- qual variável não básica irá entrar na base, com o intuito de melhorar a função objetivo;
- qual variável básica irá sair da base.

Passo 5 Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

Simplex - Passo 1

Vamos converter o PL para a **Forma Padrão**, ou seja:

1. todas as restrições serão de igualdade;
2. todas as variáveis serão não negativas (≥ 0);

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Opcional: transformar o PL em um PL de minimização
  - max $\mathbf{c}^t\mathbf{x}$ equivale a min $-\mathbf{c}^t\mathbf{x}$

Simplex - Passo 2

Vamos obter uma **Solução Básica Factível** (SBF). Em alguns casos, é trivial obter uma SBF, enquanto em outros precisaremos nos esforçar para tal.

Por hora, vamos tratar apenas de casos em que obter uma SBF é trivial, bastando fazer:

- **VB** = variáveis de folga adicionadas na conversão do modelo para a forma padrão.
- **VNB** = demais variáveis.

Simplex - Passo 3

Devemos executar o **Teste de Otimalidade**, ou seja, determinar se a SBF atual é ótima.

Esta informação está disponível no **tableau** (veremos mais em breve)!

- Se a solução for ótima, o algoritmo termina!
- Caso contrário... continuamos para o **Passo 4**.

Simplex - Passos 4 e 5

Devemos determinar qual variável **entrará** na base.

- Em geral, escolhemos a variável que mais contribuirá com a redução (ou aumento) da função objetivo.

Em seguida, devemos determinar qual variável **sairá** da base.

Por fim, devemos executar as operações elementares para computar a nova Solução Básica.

Algoritmo Simplex

Exemplo 1

Um vendedor está em dúvidas sobre quanto da fazenda ele deve destinar para plantar milho e soja. Sabemos o seguinte:

- A fazenda tem uma área total de **100** hectares.
- Cada hectare de milho resulta em um lucro de **R$ 1.500**.
- Cada hectare de soja resulta em um lucro de **R$ 1.700**.
- Para plantar milho, o fazendeiro deve investir **R$ 4.000** por hectare, enquanto para plantar soja o investimento é de **R$ 3.000**. O fazendeiro tem ao todo **R$ 3.000.000** para investir.
- A demanda de soja anda baixa, e o fazendeiro será capaz de vender a produção de no máximo **50** hectares de plantio.

Indique ao fazendeiro qual a melhor política de plantio.

Exemplo 1

Duas variáveis:

- x_1: qtde de hectares de milho a plantar
- x_2: qtde de hectares de soja a plantar

$$
\begin{array}{rrcrcll}
\text{max.} & 1500x_1 & + & 1700x_2 & & & (\div 100) \\
\text{s.a.} & 4000x_1 & + & 3000x_2 & \leq & 3000000 & (\div 1000) \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 100 & \\
 & & & x_2 & \leq & 50 & \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Exemplo 1

Duas variáveis:

- x_1: qtde de hectares de milho a plantar
- x_2: qtde de hectares de soja a plantar

$$\begin{array}{rrrl} \text{max.} & 15x_1 + & 17x_2 & \\ \text{s.a.} & 4x_1 + & 3x_2 & \leq 300 \\ & x_1 + & x_2 & \leq 100 \\ & & x_2 & \leq 50 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Agora vamos resolver usando o Algoritmo Simplex!

Exemplo 1 - Passo 1

Passo 1: Converta o PL para a **Forma Padrão**.

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & 15x_1 + 17x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 4x_1 + 3x_2 \leq 300 \\
& x_1 + x_2 \leq 100 \\
& x_2 \leq 50 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 - Passo 1

Passo 1: Converta o PL para a **Forma Padrão**.

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\text{min.} & -15x_1 & -17x_2 & & & & \qquad (\textit{opcional}) \\
\text{s.a.} & 4x_1 + & 3x_2 + s_1 & & & = 300 & \\
 & x_1 + & x_2 & + s_2 & & = 100 & \\
 & & x_2 & & + s_3 & = 50 & \\
 & x_1, & x_2, & s_1, \; s_2, & s_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Exemplo 1 - Passo 2

Passo 2: Obtenha uma **Solução Básica Factível** (SBF)

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{min.} & -15x_1 - 17x_2 \\
\text{s.a.} & 4x_1 + & 3x_2 + s_1 & & & = 300 \\
& x_1 + & x_2 & + s_2 & & = 100 \\
& & x_2 & & + s_3 & = 50 \\
& x_1, & x_2, & s_1, \; s_2, & s_3 & \geq 0
\end{array}
$$

- Está fácil: basta colocar as variáveis de folga na base!
  - **VB** $= \{s_1, s_2, s_3\}$, e **VNB** $= \{x_1, x_2\}$
  - $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 300$, $s_2 = 100$, $s_3 = 50$

Exemplo 1 - Passo 3

Passo 3: **Teste de Otimalidade**: SBF é Ótima?

1. Montamos o **tableau**
2. Avaliamos os coeficientes na função objetivo.

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{min.} & -15x_1 & -17x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & 4x_1 + & 3x_2 & +1s_1 & & & = & 300 \\
 & 1x_1 + & 1x_2 & & +1s_2 & & = & 100 \\
 & & 1x_2 & & & +1s_3 & = & 50
\end{array}
$$

Exemplo 1 - Passo 3

Passo 3: **Teste de Otimalidade**: SBF é Ótima?

1. Montamos o **tableau**
2. Avaliamos os coeficientes na função objetivo.

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$		-15	-17			
L_1:	$s_1 =$	300	4	3	1		
L_2:	$s_2 =$	100	1	1		1	
L_3:	$s_3 =$	50		1			1

- SBF **não** é ótima, pois x_1 e x_2 podem melhorar a solução.

Exemplo 1 - Passo 4

Passo 4: **Mudança de Base**! Determinar:

- Qual variável não básica irá entrar na base, com o intuito de melhorar a função objetivo;
- Qual variável básica irá sair da base.

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$		-15	-17			
L_1:	$s_1 =$	300	4	3	1		
L_2:	$s_2 =$	100	1	1		1	
L_3:	$s_3 =$	50		1			1

- x_2 entra na base, pois traz maior ganho por unidade. Mas até qual limite?

Exemplo 1 - Passo 4

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$		-15	-17			
L_1:	$s_1 =$	300	4	3	1		
L_2:	$s_2 =$	100	1	1		1	
L_3:	$s_3 =$	50		1			1

Linha		Restrição	Máx x_2
L_1:	$s_1 = 300 - 3x_2$	$s_1 \geq 0$	$^{300}/_{3} = 100$
L_2:	$s_2 = 100 - x_2$	$s_2 \geq 0$	100
L_3:	$s_2 = 50 - x_2$	$s_3 \geq 0$	50

- x_2 entrará no base na linha L_3 (**pivô**) com valor 50.
- Ou seja, a variável s_3 sairá da base.

Exemplo 1 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$		-15	-17			
L_1:	$s_1 =$	300	4	3	1		
L_2:	$s_2 =$	100	1	1		1	
L_3:	$s_3 =$	50		1			1

Executam-se as operações elementares para que x_2 apareça com coeficiente 1 na linha L_3 e com coeficiente 0 nas demais.

Exemplo 1 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$		-15	-17			
L_1:	$s_1 =$	300	4	3	1		
L_2:	$s_2 =$	100	1	1		1	
L_3:	$s_3 =$	50		1			1

- $L_3 \leftarrow L_3$
- $L_0 \leftarrow L_0 + 17L_3$
- $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$
- $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

Exemplo 1 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$	850	-15				17
L_1:	$s_1 =$	150	4		1		-3
L_2:	$s_2 =$	50	1			1	-1
L_3:	$x_2 =$	50		1			1

Temos uma nova solução básica:

- $z = 850, x_1 = 0, x_2 = 50, s_1 = 150, s_2 = 50, s_3 = 0$

Retornamos ao Passo 3...

Exemplo 1 - Passo 3

Passo 3: **Teste de Otimalidade**: SBF é Ótima?

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$	850	-15				17
L_1:	$s_1 =$	150	4		1		-3
L_2:	$s_2 =$	50	1			1	-1
L_3:	$x_2 =$	50		1			1

- SBF **não** é ótima, pois x_1 pode melhorar a solução.

Exemplo 1 - Passo 4

Passo 4: **Mudança de Base**! Determinar:

- Qual variável não básica irá entrar na base, com o intuito de melhorar a função objetivo;
- Qual variável básica irá sair da base.

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$	850	-15				17
L_1:	$s_1 =$	150	4		1		-3
L_2:	$s_2 =$	50	1			1	-1
L_3:	$x_2 =$	50		1			1

- x_1 entra na base, pois traz maior ganho por unidade. Mas até qual limite?

Exemplo 1 - Passo 4

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$	850	-15				17
L_1:	$s_1 =$	150	4		1		-3
L_2:	$s_2 =$	50	1			1	-1
L_3:	$x_2 =$	50		1			1

Linha		Restrição	Máx x_1
L_1:	$s_1 = 150 - 4x_1$	$s_1 \geq 0$	${}^{150}/_{4} = {}^{75}/_{2}$
L_2:	$s_2 = 50 - x_1$	$s_2 \geq 0$	50
L_3:	x_1 não aparece	$x_2 \geq 0$	∞

- x_1 entrará no base na linha L_1 (**pivô**) com valor $75/2$.
- Ou seja, a variável s_1 sairá da base.

Exemplo 1 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$	850	-15				17
L_1:	$s_1 =$	150	4		1		-3
L_2:	$s_2 =$	50	1			1	-1
L_3:	$x_2 =$	50		1			1

Executam-se as operações elementares para que x_1 apareça com coeficiente 1 na linha L_1 e com coeficiente 0 nas demais.

Exemplo 1 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$	850	-15				17
L_1:	$s_1 =$	150	4		1		-3
L_2:	$s_2 =$	50	1			1	-1
L_3:	$x_2 =$	50		1			1

- $L_1 \leftarrow L_1 \div 4$
- $L_0 \leftarrow L_0 + 15L_1$
- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
- $L_3 \leftarrow L_3$

Exemplo 1 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$	850	-15				17
L_1:	$x_1 =$	$^{75}/_{2}$	1		$^{1}/_{4}$		$-\,^{3}/_{4}$
L_2:	$s_2 =$	50	1			1	-1
L_3:	$x_2 =$	50		1			1

- $L_1 \leftarrow L_1 \div 4$
- $L_0 \leftarrow L_0 + 15L_1$
- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
- $L_3 \leftarrow L_3$

Exemplo 1 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$	$2825/2$			$15/4$		$23/4$
L_1:	$x_1 =$	$75/2$	1		$1/4$		$-3/4$
L_2:	$s_2 =$	$25/2$			$-1/4$	1	$-1/4$
L_3:	$x_2 =$	50		1			1

Temos uma nova solução básica:

- $z = 2825/2, x_1 = 75/2, x_2 = 50, s_1 = 0, s_2 = 25/2, s_3 = 0$

Retornamos ao Passo 3...

Exemplo 1 - Passo 3

Passo 3: **Teste de Otimalidade**: SBF é Ótima?

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0:	$z =$	$^{2825}/_2$			$^{15}/_4$		$^{23}/_4$
L_1:	$x_1 =$	$^{75}/_2$	1		$^{1}/_4$		$-\,^{3}/_4$
L_2:	$s_2 =$	$^{25}/_2$			$-^{1}/_4$	1	$-^{1}/_4$
L_3:	$x_2 =$	50		1			1

SBF é **ótima**!

- $z = 1412,5; x_1 = 37,5; x_2 = 50; s_1 = 0; s_2 = 12,5; s_3 = 0$

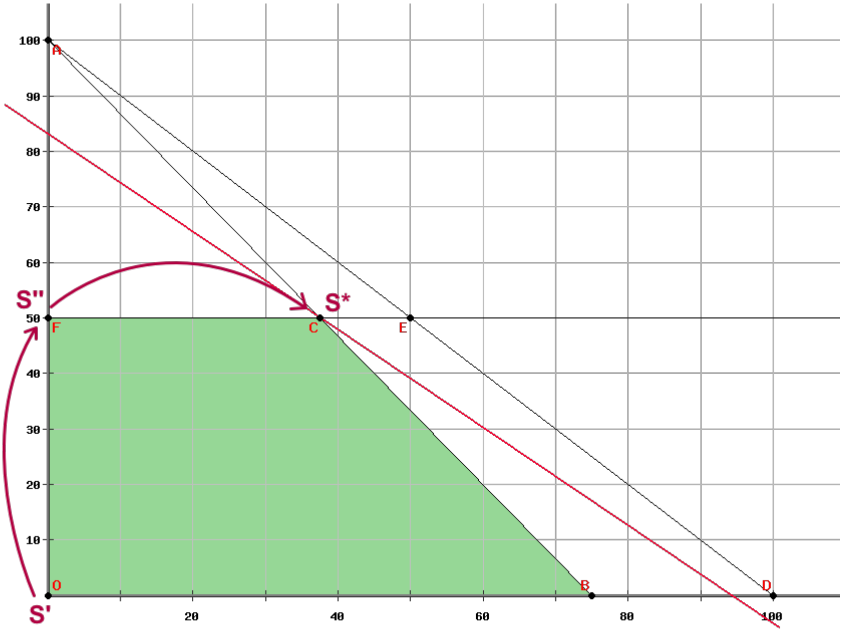
Algoritmo Simplex

Quando temos apenas 2 variáveis, podemos resolver o problema facilmente pelo **Método Gráfico**!

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & 15x_1 + 17x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 4x_1 + 3x_2 \leq 300 \\
& x_1 + x_2 \leq 100 \\
& x_2 \leq 50 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Utilizando o algoritmo Simplex, produzimos três soluções:

1. Solução S' : $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 300, 100, 50)$
2. Solução S'': $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 50, 150, 50, 0)$
3. Solução S^*: $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (75/2, 50, 0, 25/2, 0)$


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
A
S''
S*
F
C
E
O
B
D
S'
20
40
60
80
100
10
30
50
70
90

Algoritmo Simplex

Exemplo 2 - Móveis DecomMov

A empresa *DecomMov* fabrica Mesas, Armários e Cadeiras.

- Cada um desses móveis utiliza madeira e dois tipos de trabalho: acabamento e carpintaria:

Recurso	Mesa	Armário	Cadeira
Madeira (m^2)	8	6	1
Acabamento (horas)	4	2	1,5
Carpintaria (horas)	2	1,5	0,5

- Tem-se disponível 48 m^2 de madeira, 20 horas de acabamento e 8 horas de carpintaria.
- Mesas são vendidas por \$ 60, armários por \$ 30 e cadeira por \$ 20. A empresa tem demanda ilimitada por mesas e cadeiras, enquanto que no máximo 5 armários serão vendidos.

Exemplo 2 - Passo 1

Passo 1: Converta o PL para a **Forma Padrão**.

$$
\begin{array}{lrrrl}
max.\ z = & 60x_1 + & 30x_2 + & 20x_3 & \\
s.a. & 8x_1 + & 6x_2 + & x_3 & \leq 48 \\
 & 4x_1 + & 2x_2 + & 1,5x_3 & \leq 20 \\
 & 2x_1 + & 1,5x_2 + & 0,5x_3 & \leq 8 \\
 & & x_2 & & \leq 5 \\
 & x1\ , & x_2\ , & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Exemplo 2 - Passo 1

Passo 1: Converta o PL para a **Forma Padrão**.

$$
\begin{array}{llllllllll}
min.\ z = & -60x_1 & -30x_2 & -20x_3 & & & & & & \\
s.a. & 8x_1 & +6x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = 48 \\
 & 4x_1 & +2x_2 & +1,5x_3 & & +x_5 & & & = 20 \\
 & 2x_1 & +1,5x_2 & +0,5x_3 & & & +x_6 & & = 8 \\
 & & x_2 & & & & & +x_7 & = 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq 0
\end{array}
$$

Exemplo 2 - Passo 2

Passo 2: Obtenha uma **Solução Básica Factível** (se possível) da Forma Padrão.

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
min.\ z = & -60x_1 & -30x_2 & -20x_3 & & & & & \\
s.a. & 8x_1 & +6x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = 48 \\
 & 4x_1 & +2x_2 & +1,5x_3 & & +x_5 & & & = 20 \\
 & 2x_1 & +1,5x_2 & +0,5x_3 & & & +x_6 & & = 8 \\
 & & x_2 & & & & & +x_7 & = 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq 0
\end{array}
$$

- VB = x_4, x_5, x_6, x_7
- VNB = x_1, x_2, x_3

Agora podemos construir o **tableau**!

Exemplo 2 - Passo 3

Passo 3: **Teste de Otimalidade**: Determine se a Solução Básica é Ótima. Se Ótima Pare

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	0	-60	-30	-20				
L_1:	$x_4 =$	48	8	6	1	1			
L_2:	$x_5 =$	20	4	2	$3/2$		1		
L_3:	$x_6 =$	8	2	$3/2$	$1/2$			1	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

- Solução **não** é ótima, pois x_1, x_2 e x_3 tem coeficientes negativos na linha da função objetivo.

Exemplo 2 - Passo 4

Passo 4: Como solução não é ótima, ocorrerá **Mudança de Base**.

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	0	-60	-30	-20				
L_1:	$x_4 =$	48	8	6	1	1			
L_2:	$x_5 =$	20	4	2	$3/2$		1		
L_3:	$x_6 =$	8	2	$3/2$	$1/2$			1	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

- A variável x_1 **entrará na base**.
- Quem sairá da base?
  A variável da linha que mais limita o valor de x_1.

Exemplo 2 - Passo 4

Limite de aumento do valor de x_1:

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	0	-60	-30	-20				
L_1:	$x_4 =$	48	8	6	1	1			
L_2:	$x_5 =$	20	4	2	$3/2$		1		
L_3:	$x_6 =$	8	2	$3/2$	$1/2$			1	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

Linha		Restrição	Máx x_1
L_1	$x_4 = 48 - 8x_1$	$x_4 \geq 0$	$^{48}/_8 = 6$
L_2	$x_5 = 20 - 4x_1$	$x_5 \geq 0$	$^{20}/_4 = 5$
Pivô: L_3	$x_6 = 8 - 2x_1$	$x_6 \geq 0$	$^{8}/_2 = 4$
L_4	x_1 não aparece	$x_7 \geq 0$	∞

A variável x_6 sairá da base para dar lugar à variável x_1.

Exemplo 2 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	0	-60	-30	-20				
L_1:	$x_4 =$	48	8	6	1	1			
L_2:	$x_5 =$	20	4	2	$3/2$		1		
L_3:	$x_6 =$	8	2	$3/2$	$1/2$			1	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

- Na linha L_3 a variável x_6 sairá da base e entrará a variável x_1.
- Portanto, faremos inicialmente $L_3 \leftarrow L_3/2$

Exemplo 2 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	0	-60	-30	-20				
L_1:	$x_4 =$	48	8	6	1	1			
L_2:	$x_5 =$	20	4	2	$3/2$		1		
L_3:	$x_1 =$	4	1	$3/4$	$1/4$			$1/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

- Agora atualizaremos as demais linhas, ou seja:
  - $L_0 \leftarrow L_0 + 60L_3$
  - $L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3$
  - $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$
  - $L_4 \leftarrow L_4$ (coeficiente de x_1 já é zero)

Exemplo 2 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	240		15	-5			30	
L_1:	$x_4 =$	16			-1	1		-4	
L_2:	$x_5 =$	4		-1	$1/2$		1	-2	
L_3:	$x_1 =$	4	1	$3/4$	$1/4$			$1/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

- Após o pivoteamento, retornamos ao **Passo 3**.

Exemplo 2 - Passo 3

Passo 3: **Teste de Otimalidade**: Determine se a Solução Básica é Ótima. Se Ótima Pare

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	240		15	-5			30	
L_1:	$x_4 =$	16			-1	1		-4	
L_2:	$x_5 =$	4		-1	$1/2$		1	-2	
L_3:	$x_1 =$	4	1	$3/4$	$1/4$			$1/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

- Solução **não** é ótima, pois x_3 tem coeficiente negativo na linha da função objetivo.

Exemplo 2 - Passo 4

Passo 4: Como solução não é ótima, ocorrerá **Mudança de Base**.

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	240		15	-5			30	
L_1:	$x_4 =$	16			-1	1		-4	
L_2:	$x_5 =$	4		-1	$1/2$		1	-2	
L_3:	$x_1 =$	4	1	$3/4$	$1/4$			$1/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

- A variável x_3 **entrará na base**.
- Quem sairá da base?
  A variável da linha que mais limita o valor de x_3.

Exemplo 2 - Passo 4

Limite de aumento do valor de x_3:

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	240		15	-5			30	
L_1:	$x_4 =$	16			-1	1		-4	
L_2:	$x_5 =$	4		-1	$1/2$		1	-2	
L_3:	$x_1 =$	4	1	$3/4$	$1/4$			$1/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

Linha		Restrição	Máx x_3
L_1	$x_4 = 16 + x_3$	$x_4 \geq 0$	∞
Pivô: L_2	$x_5 = 4 - 0.5x_3$	$x_5 \geq 0$	$4/0.5 = 8$
L_3	$x_1 = 4 - 0.25x_3$	$x_1 \geq 0$	$4/0.25 = 16$
L_4	x_3 não aparece	$x_7 \geq 0$	∞

A variável x_5 sairá da base para dar lugar à variável x_3.

Exemplo 2 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	240		15	-5			30	
L_1:	$x_4 =$	16			-1	1		-4	
L_2:	$x_5 =$	4		-1	$1/2$		1	-2	
L_3:	$x_1 =$	4	1	$3/4$	$1/4$			$1/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

- Na linha L_2 a variável x_5 sairá da base e entrará a variável x_3.
- Portanto, faremos inicialmente $L_2 \leftarrow 2L_2$

Exemplo 2 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	240		15	-5			30	
L_1:	$x_4 =$	16			-1	1		-4	
L_2:	$x_3 =$	8		-2	1		2	-4	
L_3:	$x_1 =$	4	1	$3/4$	$1/4$			$1/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

- Agora atualizaremos as demais linhas, ou seja:
  - $L_0 \leftarrow L_0 + 5L_2$
  - $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
  - $L_3 \leftarrow L_3 - L_2/4$
  - $L_4 \leftarrow L_4$ (coeficiente de x_3 já é zero)

Exemplo 2 - Passo 5

Passo 5: Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	280		5			10	10	
L_1:	$x_4 =$	24		-2		1	2	-8	
L_2:	$x_3 =$	8		-2	1		2	-4	
L_3:	$x_1 =$	2	1	$5/4$			$-1/2$	$3/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

- Após o pivoteamento, retornamos ao **Passo 3**.

Exemplo 2 - Passo 3

Passo 3: **Teste de Otimalidade**: Determine se a Solução Básica é Ótima. Se Ótima Pare

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	280		5			10	10	
L_1:	$x_4 =$	24		-2		1	2	-8	
L_2:	$x_3 =$	8		-2	1		2	-4	
L_3:	$x_1 =$	2	1	$5/4$			$-1/2$	$3/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

A SBF atual é ótima!

- Solução Ótima (x_1, x_2, x_3): $(2, 0, 8)$
- Base Ótima $(x_1, \ldots, x_7)$: $(2, 0, 8, 24, 0, 0, 5)$

Algoritmo Simplex

Base Ótima - Informações

A Base Ótima nos fornece algumas informações úteis

Por exemplo:

- Custo Reduzido
- Restrições Ativas
- Restrições Inativas

Custo Reduzido

A linha L_0 indica *quanto* o aumento de *uma unidade* em cada variável altera o valor da função objetivo.

- VB tem Custo Reduzido 0 na base ótima
- VNB (ex. x_2) na base ótima com coeficiente 5 indica que aumentar x_2 em 1 unidade diminui o lucro em 5 unidades (lembre-se que o problema era de maximização e o transformamos em um problema de minimização)

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	280		5			10	10	
L_1:	$x_4 =$	24		-2		1	2	-8	
L_2:	$x_3 =$	8		-2	1		2	-4	
L_3:	$x_1 =$	2	1	$5/4$			$-1/2$	$3/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

Restrições Ativas

Restrições com variável de folga igual a zero.

- As restrições 2 e 3 (horas de acabamento e carpintaria) são as únicas que estão limitando o aumento do lucro.

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	280		5			10	10	
L_1:	$x_4 =$	24		-2		1	2	-8	
L_2:	$x_3 =$	8		-2	1		2	-4	
L_3:	$x_1 =$	2	1	$5/4$			$-1/2$	$3/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

Restrições Inativas

Restrições com variável de folga > 0

- As restrições 1 e 4 (qtde. de madeira e demanda de armários) são restrições **com folga**. Em outras palavras: ter mais madeira, por exemplo, não vai permitir uma produção maior.

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
L_0:	$z =$	280		5			10	10	
L_1:	$x_4 =$	24		-2		1	2	-8	
L_2:	$x_3 =$	8		-2	1		2	-4	
L_3:	$x_1 =$	2	1	$5/4$			$-1/2$	$3/2$	
L_4:	$x_7 =$	5		1					1

Perguntas?